III. Diện tích hình phẳng – Thể tích vật thể tròn xoay :

- Viết phương trình các đường giới hạn hình phẳng
- Chọn công thức để tính diện tích

$$\boxed{S = \int_a^b \left| y_c - y_{c'} \right| dx} \quad \text{hoặc} \quad \boxed{S = \int_c^d \left| x_c - x_{c'} \right| dy}$$

- Chọn công thức để tính thể tích :

- Hình phẳng quay quanh Ox : $\boxed{V = \pi \int_a^b \left| y_c^2 - y_{c'}^2 \right| dx}$

- Hình phẳng quay quanh Oy : $\boxed{V = \pi \int_c^d \left| x_c^2 - x_{c'}^2 \right| dy}$

- Biến x thì cận là $x = a$; $x = b$ cho trong giả thiết hoặc hoành độ các giao điểm

  Biến y thì cận là $y = c$; $y = d$ cho trong giả thiết hoặc tung độ các giao điểm

I. Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng :

$$\overrightarrow{AB} = (a_1 ; a_2), \ \overrightarrow{AC} = (b_1 ; b_2) \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| a_1 b_2 - a_2 b_1 \right|$$

1. Đường thẳng :

a. Phương trình đường thẳng Δ :

- Phương trình tổng quát : $\boxed{Ax + By + C = 0}$

  (vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (A ; B)$; $A^2 + B^2 \neq 0$)

- Phương trình tham số : $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}}$ $(t \in R)$

  (vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (a ; b)$ và qua điểm $M(x_0, y_0)$)

- Phương trình chính tắc : $\boxed{\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}}$

- Phương trình đoạn chắn : $\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$

  (Δ qua $A(a ; 0)$; $B(0 ; b)$)

b. Góc φ ($0^0 \le \varphi \le 90^0$) giữa hai đường thẳng :

$$Ax + By + C = 0 \text{ và } A'x + B'y + C' = 0$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{n'}|}{|\vec{n}|.|\vec{n'}|} = \frac{|AA' + BB'|}{\sqrt{A^2 + B^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2}}}$$

c. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0)$ đến đường thẳng Δ:

$$\boxed{d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

d. Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng

$$\boxed{\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}}$$

e. Hai điểm $M(x_1, y_1)$, $M'(x_2, y_2)$ nằm cùng phía so với Δ

$$\Leftrightarrow t_1.t_2 > 0$$

Hai điểm $M(x_1, y_1)$, $M'(x_2, y_2)$ nằm khác phía so với Δ

$$\Leftrightarrow t_1.t_2 < 0$$

$$\left(t_1 = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \;\; ; \;\; t_2 = \frac{A'x_2 + B'y_2 + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}\right)$$

2. Đường tròn :

- Phương trình đường tròn :

Dạng 1 : Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính R

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

Dạng 2 : Phương trình có dạng $\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}$

với điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình đường tròn (C) có

tâm $I(a;b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

- Phương tích của một điểm $M_0(x_0; y_0)$ đối với một đường tròn :

$$\boxed{P_{M/(C)} = x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c}$$

3. Elip :

- Phương trình chính tắc Elip (E) $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ $(a>b)$; $c^2 = a^2 - b^2$
- Tiêu điểm : $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$
- Đỉnh trục lớn : $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$
- Đỉnh trục bé : $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$; Tâm sai : $e=\dfrac{c}{a}$
- Phương trình đường chuẩn : $\boxed{x=\pm\dfrac{a}{e}}$
- Phương trình tiếp tuyến của Elip tại $M(x_0;y_0)\in(E)$ $\boxed{\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1}$
- Điều kiện tiếp xúc của (E) và (Δ) : $Ax+By+C=0$

$$\boxed{A^2a^2+B^2b^2=C^2}$$

4. Hypebol :

- Phương trình chính tắc Hypebol (H) $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ $c^2=a^2+b^2$
- Tiêu điểm : $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$
- Đỉnh : $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$; Tâm sai : $e=\dfrac{c}{a}$
- Phương trình đường chuẩn : $\boxed{x=\pm\dfrac{a}{e}}$
- Phương trình tiệm cận : $\boxed{y=\pm\dfrac{b}{a}x}$
- Phương trình tiếp tuyến của Hypebol tại $M(x_0;y_0)\in(H)$: $\boxed{\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1}$
- Điều kiện tiếp xúc của (H) và (Δ): $Ax+By+C=0$

$$\boxed{A^2a^2-B^2b^2=C^2} \quad (C\neq 0)$$

5. Parabol :

- Phương trình chính tắc của Parabol : $\boxed{(P):\ y^2=2px}$
- Tiêu điểm : $F(\dfrac{p}{2};0)$; • Phương trình đường chuẩn : $\boxed{x=-\dfrac{p}{2}}$
- Phương trình tiếp tuyến với (P) tại M $(x_0;y_0)\in(P)$: $\boxed{y_0y=p(x_0+x)}$
- Điều kiện tiếp xúc của (P) và (Δ) : $Ax+By+C=0$ $\boxed{2AC=B^2p}$

II. Phương pháp tọa độ trong không gian :

1. Tích có hướng hai vectơ :

a. Định nghĩa : $\vec{u} = (x;y;z)$ và $\vec{v} = (x';y';z')$

$$\boxed{\left[\vec{u},\vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix};\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\right) = (yz' - zy' ;\ zx' - xz' ;\ xy' - yx')}$$

b. Các ứng dụng :

- $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $\left[\vec{u},\vec{v}\right] = \vec{0}$
- $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w} = 0$
- $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- ABCD là tứ diện $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = m \neq 0$; $V_{ABCD} = \frac{1}{6}|m|$

2. Mặt phẳng :

a. Phương trình mặt phẳng (α):

- Phương trình tổng quát : $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

$\vec{n} = (A;B;C)$, $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

- Phương trình đoạn chắn : $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$

((α) qua $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$

b. Góc giữa hai mặt phẳng :

(α) : $Ax + By + Cz + D = 0$

(β) : $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{n}'|}{|\vec{n}|.|\vec{n}'|} = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}}$$

c. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ đến mặt phẳng (α) :

$$\boxed{d(M,(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

3. Đường thẳng :

a. Ba dạng phương trình của đường thẳng :

- Phương trình tham số của Δ qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và

  có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b;c)$:
$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}} \quad (t \in R)$$

- Phương trình chính tắc : $\boxed{\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}}$

- Phương trình tổng quát : $\boxed{\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}}$

  (với $A:B:C \neq A':B':C'$)

b. Góc giữa hai đường thẳng :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{u'}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{u'}|} = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}}$$

c. Khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ (Δ có vtcp $\vec{u}$ và qua M) :

$$\boxed{d(A,\Delta) = \frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MA}\right]\right|}{|\vec{u}|}}$$

d. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau :

Δ có vtcp $\vec{u}$ và qua M ; Δ' có vtcp $\vec{v}$ và qua M'

$$\boxed{d(\Delta,\Delta') = \frac{\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|}}$$

e. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) :

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

4. Mặt cầu :

a. Phương trình mặt cầu :

- *Dạng 1* : Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R

$$\boxed{(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2 = R^2}$$

- *Dạng 2* : Phương trình có dạng :

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d = 0}$$

với điều kiện $a^2+b^2+c^2-d > 0$ là phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

b. Sự tương giao giữa mặt cầu và mặt phẳng :

- $d(I,(\alpha))<R \Leftrightarrow (\alpha)$ giao (S) theo đường tròn (C)

  - Phương trình (C) : $\boxed{\begin{cases}(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2=R^2\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}}$

  - Tâm H của (C) là hình chiếu của tâm $I(a;b;c)$ lên mặt phẳng (α)

  - Bán kính của (C) : $r=\sqrt{R^2-IH^2}$

- $d(I,(\alpha))=R \Leftrightarrow (\alpha)$ tiếp xúc với (S)

- $d(I,(\alpha))>R \Leftrightarrow (\alpha)\cap(S) = \phi$

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^nb^n = \sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k$$

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^nx^n = \sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k$$

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - \cdots + (-1)^nC_n^nx^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kx^k$$

Tính chất :	$C_n^n=C_n^0=1$	$C_n^k=C_n^{n-k}$	$C_n^{k-1}+C_n^k=C_{n+1}^k$

Công thức :	$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$	$P_n=n!$